



Analysetechniken für ereignisdiskrete Systeme

Peter Buchholz

LS Informatik IV, Universität Dortmund

- Motivation
- Analysetechniken
 - funktional – quantitativ
 - zustandsbasiert – nicht-zustandsbasiert
 - exakt – approximativ
- Strukturierte und heterogene Analysemethoden
- Analyse logistischer Systeme



Kontext des Vortrags: Modellgestützte Analyse von Systemen

Typische Modellierungssichtweise hier:

- Modellzustand ist beschrieben durch Wert der Zustandsvariablen
- Modellzustand ändert sich im Laufe der Zeit durch das Eintreten von (atomaren) Ereignissen sprunghaft
- Zwischen Ereigniszeitpunkten bleibt der Modellzustand konstant
- In jedem endlichen Zeitintervall treten nur endlich viele Ereignisse auf

Konkrete Interpretationen dieses Verhaltens:

Kunden: kommen an, warten auf Bedienung, werden bedient, wechseln zu einem anderen Bediener, verlassen das System

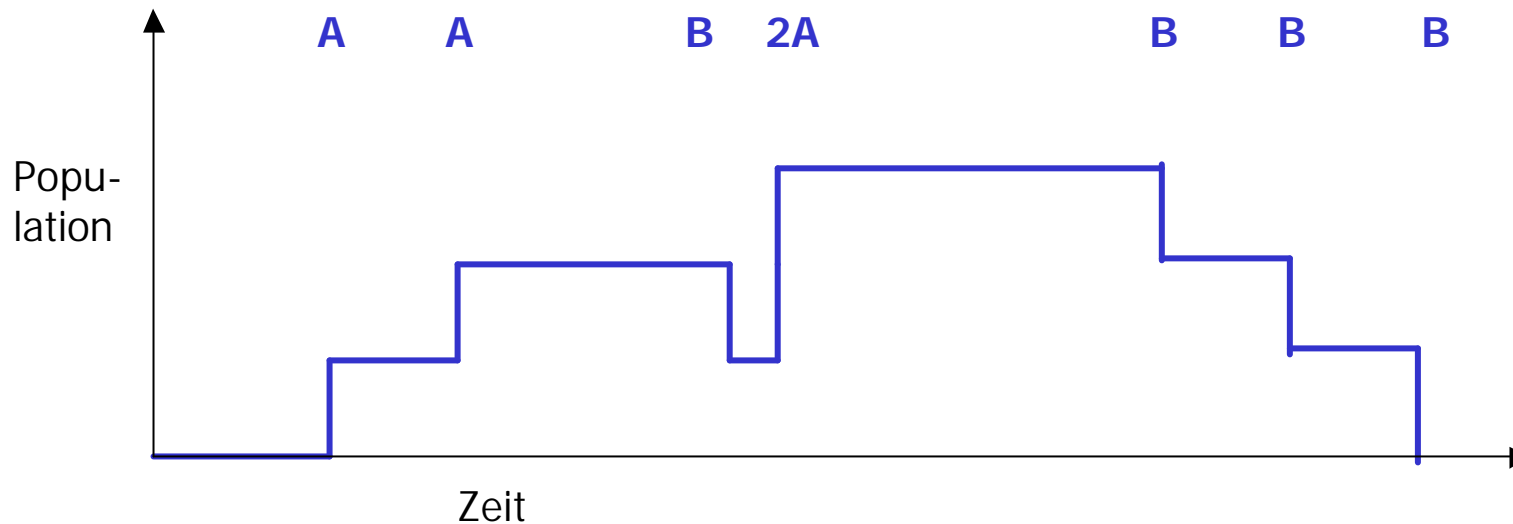
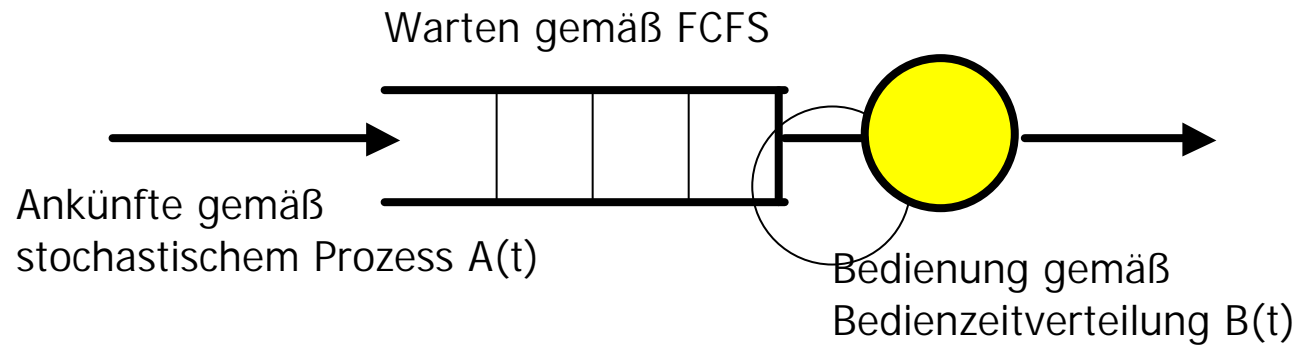
Programme: werden initiiert, führen einen Befehl aus, warten auf die Erfüllung einer Bedingung, terminieren

Güter: werden aus Teilen zusammengesetzt, werden mit anderen Gütern auf Paletten zusammengefasst, werden transportiert, werden verbraucht

....



Beispiel eines dynamischen Ablaufs

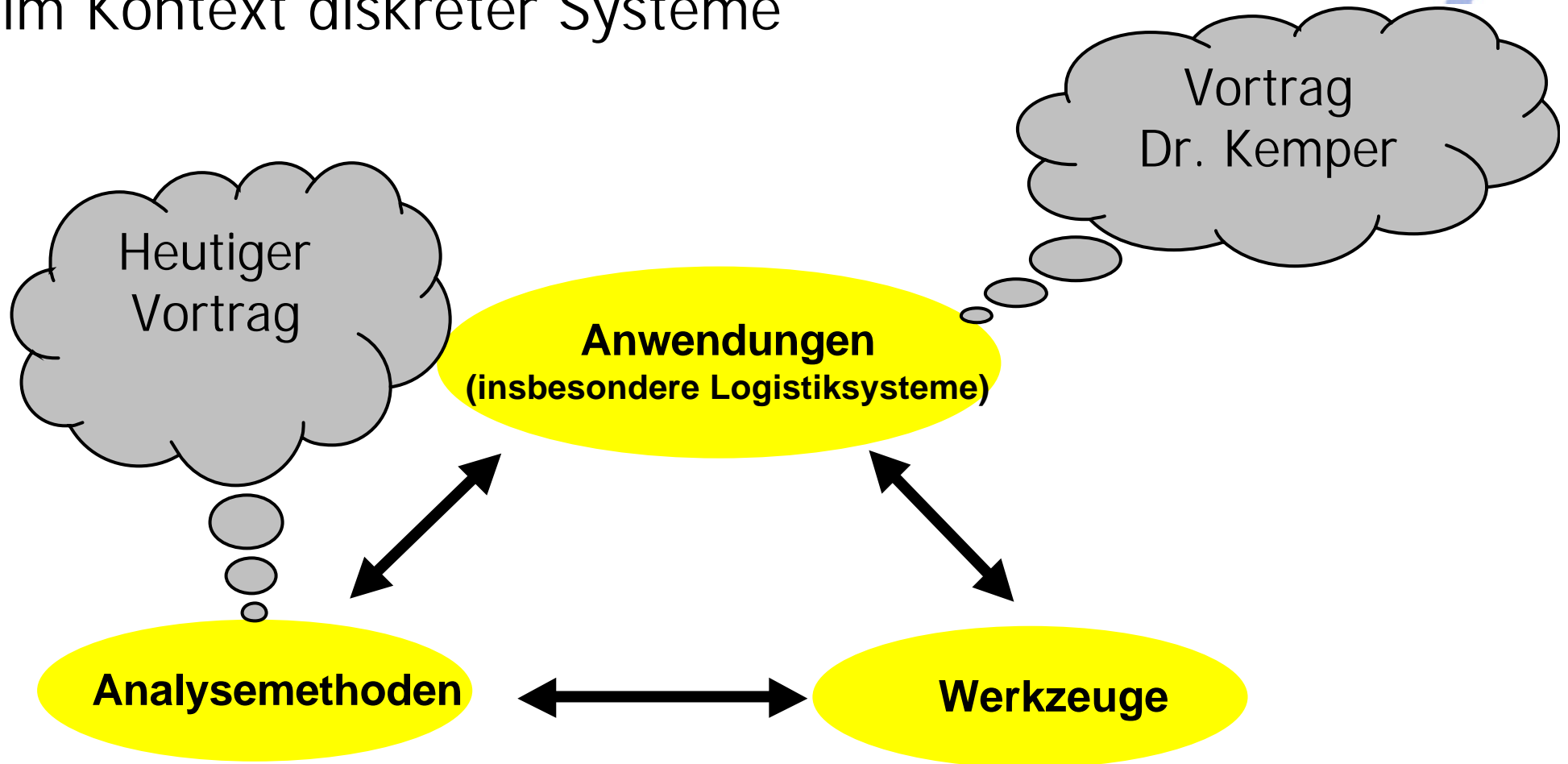


Typische quantitative Analyseziele:

Bestimmung von Kenngrößen (Momente, Quantile) der

- Verweilzeit
- Auslastung
-

Forschungsbereiche im Kontext diskreter Systeme





Systembeschreibung

Zahlreiche Spezifikationsmittel

Simulationssprachen

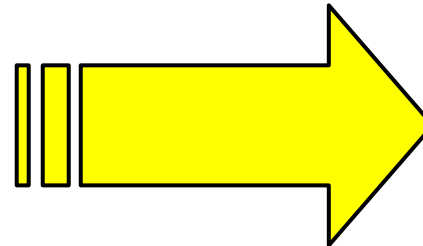
- GPSS
- Simula, Demos
- ...

Spezifikationssprachen

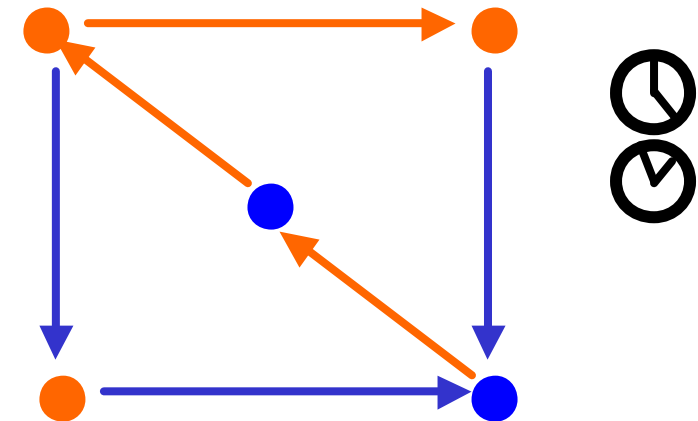
- (T)SDL
- UML
- ...

- (Stochastische)-Petri-Netze
- Warteschlangennetze
- (Stochastische) Automaten
- Prozessketten
- ...

Abbildung
implizit oder
explizit



(Mehrfach)-Bewertete Zustands-/Transitionssysteme



Allgemeine Form

- Zustände mit
 - Qualitativen Parametern
 - Quantitativen Parametern
- Transitionen mit
 - Qualitativen Parametern
 - Quantitativen Parametern
- Uhren



Analyseziele

Qualitativ

- ⇒ „korrektes“ Verhalten
- ⇒ Verklemmungsfreiheit
- ⇒ Vermeidung unsicherer Zustände
- ⇒ Lebendigkeit
- ⇒ Terminierung

Quantitativ

- ⇒ Antwortzeiten
- ⇒ Durchsätze
- ⇒ Auslastung
- ⇒ Verfügbarkeit
- ⇒ Lebensdauern
- ⇒ Einhaltung von Zeitschranken

Oft isolierte Behandlung einzelner Analyseziele



Analysemethoden

Qualitativ

- ⇒ Zustandsbasiert
 - ⇒ Erreichbarkeitsanalyse
 - ⇒ Modellüberprüfung (Model Checking)
 - ⇒ Äquivalenz & Aggregation
- ⇒ Nicht zustandsbasiert
 - ⇒ Invarianten
 - ⇒ unvollständige Analyse
 - ⇒ Testen/Simulation

+ diverse Kombinationen unterschiedlicher Techniken
(heterogene Analyse)

Quantitativ

- ⇒ Zustandsbasiert
 - ⇒ Numerische Analyse
 - ⇒ Quantitative Modellüberprüfung
 - ⇒ Äquivalenz & Aggregation
- ⇒ Nicht zustandsbasiert
 - ⇒ Produktform
 - ⇒ Approximation
 - ⇒ Simulation

Unterschiedliche Techniken erfordern unterschiedliche Restriktionen bzgl. erzielbarer Resultate und darstellbaren Verhaltens



Ereignisdiskrete Simulation

⇒ Vorgehen

- ⇒ Nachspielen des dynamischen Verhaltens
 - ⇒ Zustandsdarstellung durch Programmvariablen
 - ⇒ Zeitgerechte Ausführung von Ereignissen durch Ereignisliste
 - ⇒ Realisierung statistischer Einflüsse durch Pseudozufallszahlen
- ⇒ Beobachtung des Systemverhaltens
 - ⇒ Erkennen von Fehlern, unerwünschten Zuständen etc.
 - ⇒ statistische Auswertung quantitativer Größen

⇒ Vorteile

- ⇒ Anwendungsbreite

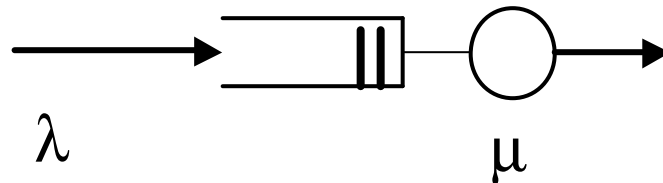
⇒ Grenzen

- ⇒ Finden von Fehlern aber keine Verifikation
- ⇒ Statistische Ergebnisse
- ⇒ Simulationsaufwand



Simulationsbeispiel

Simulative Bestimmung der Wahrscheinlichkeit
Population $> N$ während eines aktiven Phase



- $\gamma :=$ gesuchte Wahrscheinlichkeit
- $M :=$ Anzahl notwendiger Beobachtungen
- Konfidenzintervallbreite 10% (des ermittelten Wertes)
- 99% Konfidenzwahrscheinlichkeit:

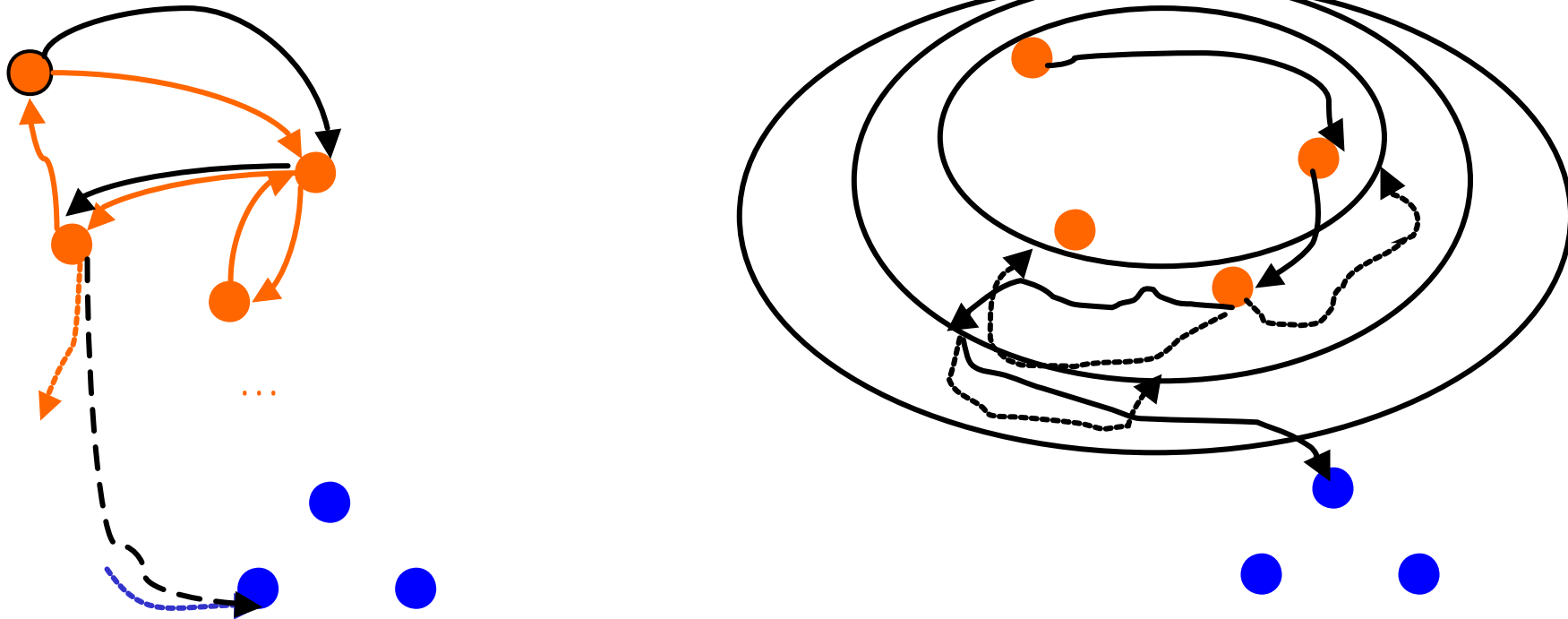
$$M \approx 100 \cdot 2.576^2 \cdot (1 - g) \cdot g$$

• Für $\gamma=10^{-6}$: $M \approx 6.64 \cdot 10^8$ und für $\gamma=10^{-9}$: $M \approx 6.64 \cdot 10^{11}$

**Allgemein: Halbierung der Breite der Konfidenzintervalle \hat{P}
Vervierfachung der Laufzeit**



Effizienzsteigerung der Simulation



Für beide Ansätze gilt:

- Effiziente Bestimmung kleiner Wahrscheinlichkeiten in kleinen Beispielmotellen mit vorhersagbarem Verhalten
- Für komplexere Modelle sind gute Parametrisierungen der Verfahren nicht bekannt
- Der unbedachte Einsatz der Methoden führt meist zur Vergrößerung der Konfidenzintervalle und in Extremfällen zu unendlichen Varianzen der Resultatschätzer



Probleme der diskreten Simulation

- Ergebnisse auf Basis des Besuchs einiger Zustände
(in fast allen Beispielen werden die meisten Zustände nicht besucht)
 - funktionale Korrektheit kann nicht garantiert werden
 - Gültigkeit quantitativer Resultate kann nicht garantiert werden
 - Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Basis von Replikationen oder eines langen Simulationslaufs (im stationären Fall)
 - Über endliche Zeiträume relativ einfach zu ermitteln
 - Für stationäres Verhalten treten zusätzliche Probleme auf
- Keine Simulation ohne statistische Auswertung
- (Zwangsläufige) Grenzen statistischer Verfahren beachten
- Gewinnung zusätzlicher Sicherheit durch Kombination mit anderen Analysetechniken



Zustandsbasierte Analyse

- Aufbau des Zustands-/Transitionssystems
- Analyse auf dem Zustandsraum
 - Funktionale Analyse durch Model-Checking
 - Quantitative Analyse durch numerische Analyse von Markov-Prozessen

Beachtliche Fortschritte in den letzten Jahren bei der Behandlung sehr großer Zustandsräume durch

- Kompakte Darstellungen für Zustandsmengen und Transitionssysteme
- Effiziente Algorithmen auf diesen Darstellungen

Aktueller Status zustandsbasierter Techniken

Zustandszahlen 10^{20} (und darüber)

- Zustandsraumanalyse
- Model-Checking

Zustandszahlen 10^7

- numerische Analyse
- quant. Model-Checking

In Teilen zustandsunabhängig

- Approximationsmethoden
- Hybride Analyse

Aktuelle Forschung

- Optimierung-Dimensionierung

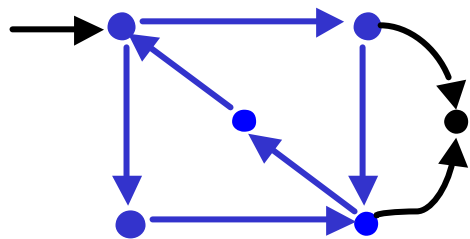
Numerische Analyse von Markov-Prozessen



Voraussetzung: Zukünftiges Verhalten hängt nur vom aktuellen Zustand ab!

- ⇒
1. Verweilzeiten in einzelnen Zuständen negativ exponentiell verteilt
 2. Auswahl des Nachfolgezustands auf Basis von Transitionswahrscheinlichkeiten

Beschreibung allgemeineren Verhaltens durch komplexere Zustände



Approximation allgemeiner Verteilungen durch Phasenverteilungen

Preis: Vergrößerung des Zustandsraums

Beschreibung Markov-Prozess durch Generator-Matrix

$$\mathbf{Q} \in R^{(n \times n)}, \quad \mathbf{Q}(x, x) = -\sum_{y \in S, x \neq y} \mathbf{Q}(x, y)$$

Zustandszahl n

Allgemeine Analyseprobleme

stationär $\mathbf{pQ} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(i) = 1$

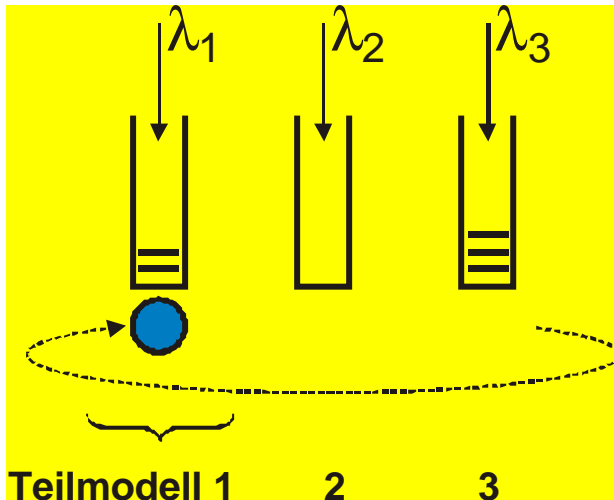
transient $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)e^{\mathbf{Q}t}$



Effiziente Analyseverfahren

Ausnutzung der Modellstruktur bei der Analyse

Modell



Numerische Analyse

Durch iterative numerische Techniken auf Basis der kompakten Matrixdarstellung

Speicherbedarf der Matrixdarstellung $O\left(\sum_{i=1}^J n_i\right)$ statt $O\left(\prod_{i=1}^J n_i\right)$

Markov-Prozess

Zustandsraum: $S \subseteq \times_{j=1, \dots, J} S_j$

Generator-Matrix:

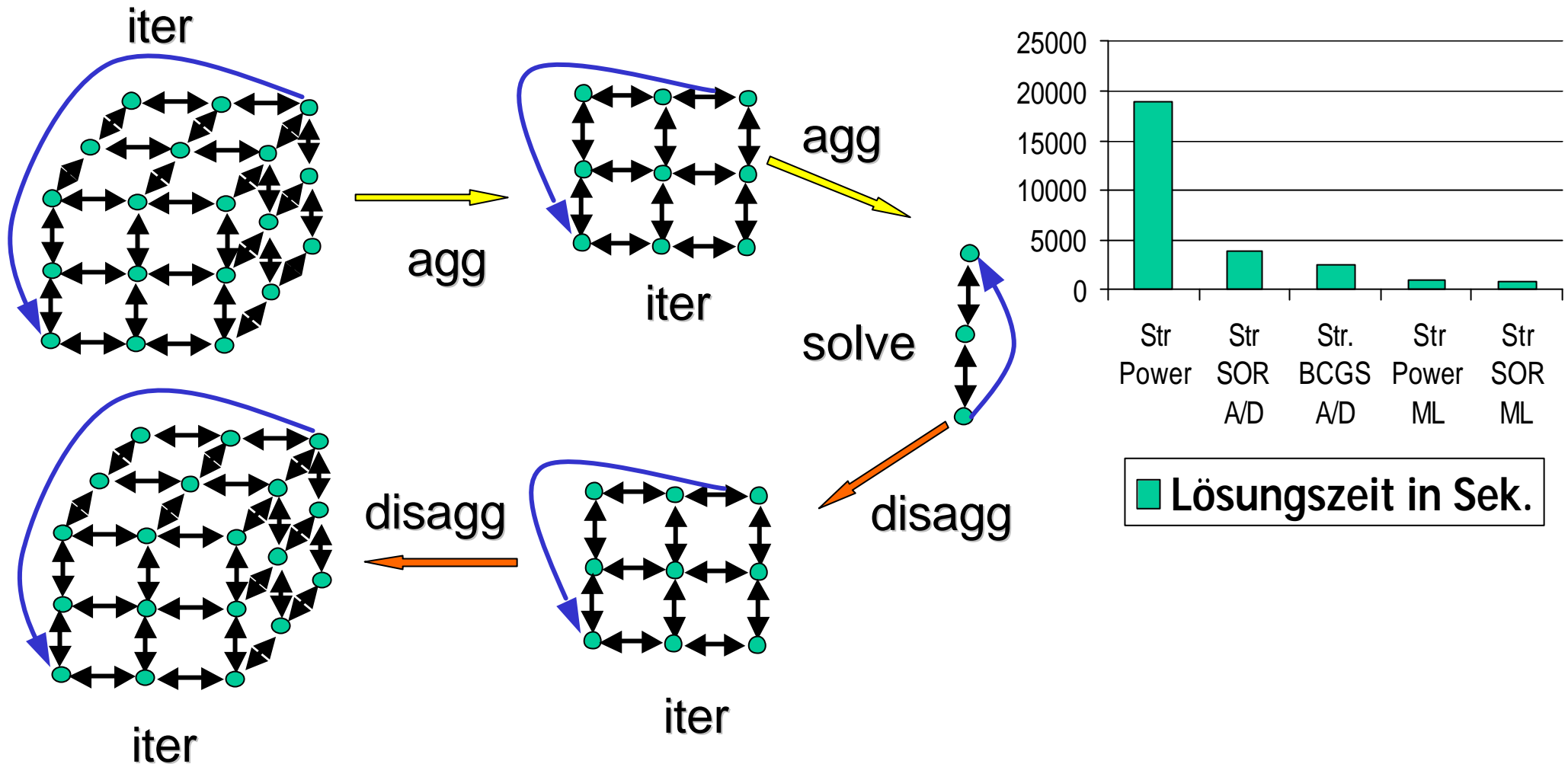
$$Q \subseteq \bigoplus_{j=1}^J Q_l^{(j)} + \sum_{t \in TS} \bigotimes_{j=1}^J E_t^{(j)} (+D)$$



Effiziente Analyseverfahren

Entwicklung numerischer Techniken auf Basis der Matrixstruktur

- Adaption von Mehrgitterverfahren \Rightarrow Mehrebenenverfahren





Heterogene Analysetechniken

Analyse realistischer Modelle ist oft nur durch den kombinierten Einsatz mehrerer Techniken möglich

- Sequentielle Analyse eines Modells mit unterschiedlichen Techniken (u.U. mehrfach, iterativ)

Beispiele: Funktionale Analyse und anschließende Simulation
Analytische Voranalyse und Aggregatbildung und
anschließende Simulation des Modells mit
eingebundenen Aggregaten

Voraussetzungen: Verfügbarkeit unterschiedlicher Analyseansätze in
einer Werkzeugumgebung

Oftmals Transformatoren für Modellbeschreibungen

- Entwicklung neuer Analysetechniken durch die Kombination bekannter Techniken

Beispiel: **Kombination Simulation und numerischer Analyse**
Kopplung von Simulatoren

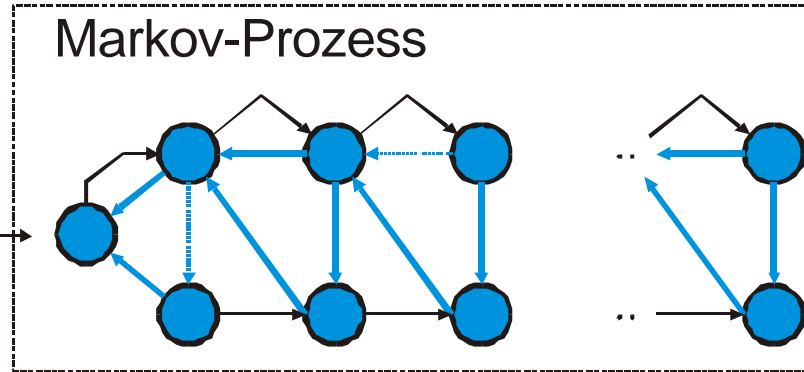
Voraussetzungen: Offene Schnittstellen der Analysetechniken
Spezifikation strukturierter Modelle



Kombination Simulation-Numerik

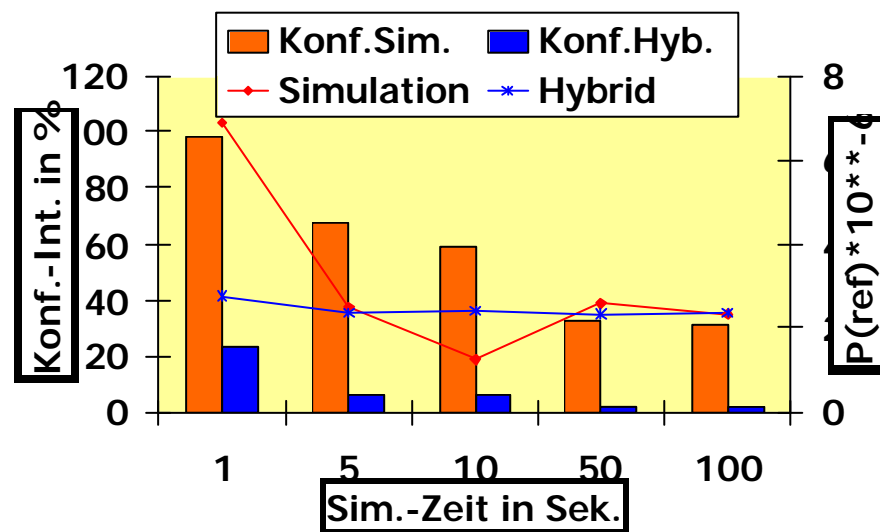
Ankunfts-
Prozess

$A(t)$

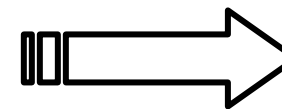


Simulation Ankunftsprozess

Numerische
Verteilungsberechnung
zwischen Ankunftszeitpunkten



Variabilität des
Bedienprozesses
verschwindet



schmalere
Konfidenzintervalle

geringerer Aufwand



Interdisziplinäre Zusammenarbeit

Methodenentwicklung

- Numerische Mathematik: Entwicklung numerischer Verfahren für Markov-Ketten
- Informatik: Parallele/Verteilte Programmierung, Visualisierung, ...
- Statistik: Simulationsauswertung, Datenmodellierung,

Anwendungen

- Rechensysteme, Parallelrechner
- Computernetze, Protokolle
- Gebäudevernetzung
- Große Netze der Logistik
- Fertigungssysteme
- Workflows
- Verkehrssysteme
- ...

SFB 358 (Dresden)

SFB 559 (Dortmund)