

# Fehlerkontrollierte Berechnungen von Problemen der maschinellen Fertigung

Dipl.-Math. Andreas Schröder  
Wissenschaftliches Rechnen, Fachbereich Mathematik  
Universität Dortmund

Domus-Kolloquium, 10.6.2002

**DFG-Projekt:**

Simulationsgestützte Offline-Prozeßplanung und -optimierung bei der Fertigung von Freiformflächen.

**Teilprojekt 2:**

Fehlerkontrollierte Finite-Elemente-Diskretisierungen für maschinelle Fertigungsprozesse.

## **Inhalt**

1. Probleme der maschinellen Fertigung
2. Fehlerkontrolle, ein allgemeines Konzept
3. Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen
4. Fehlerkontrolle bei Problemen aus der Fertigungstechnik
5. Ausblick

# Probleme der maschinellen Fertigung

## Fräsprozesse

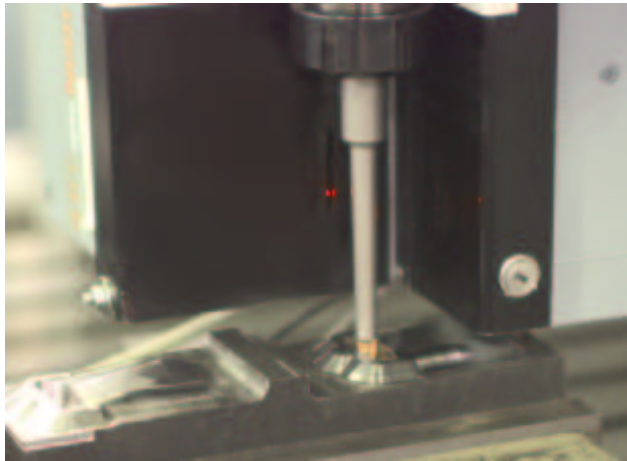


Abbildung 1: Fräserapparatur

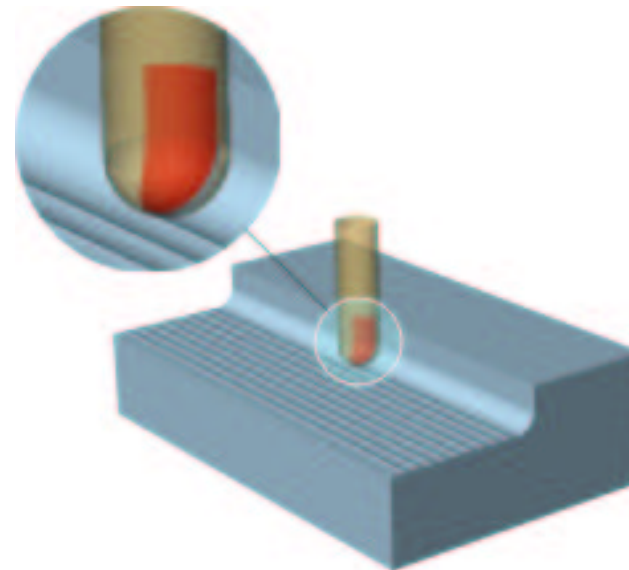


Abbildung 2: Fräserkopf und Werkstück

## Schleifprozesse

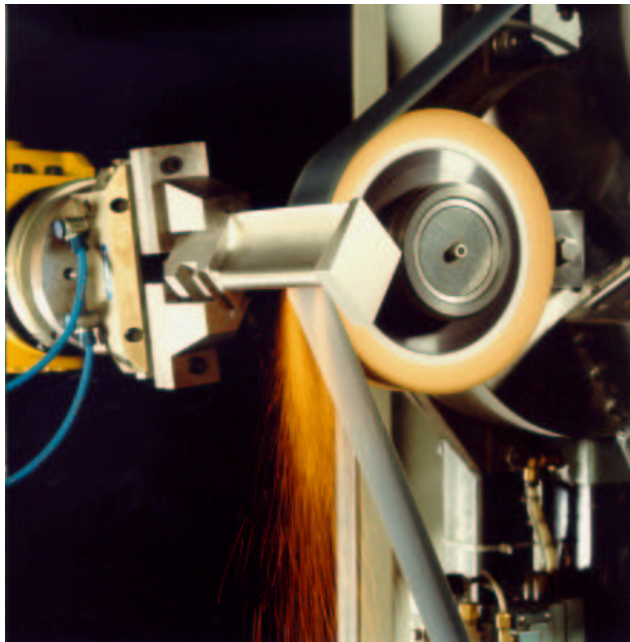


Abbildung 3: Kontaktrolle, Schleifband und Werkstück

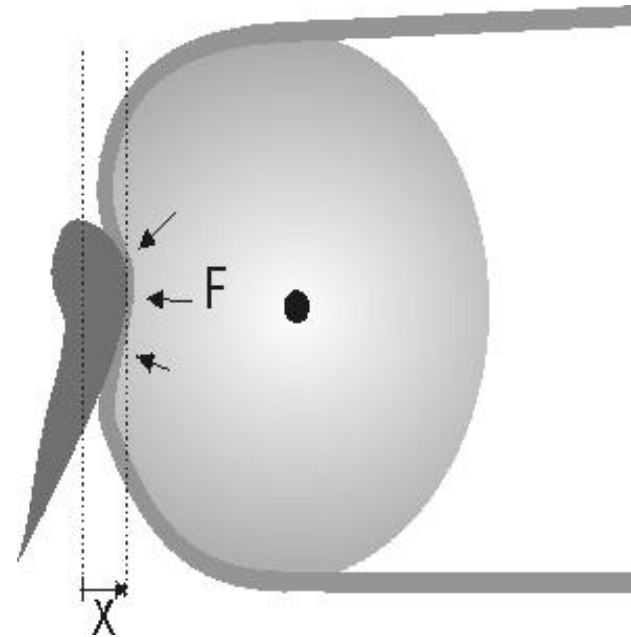


Abbildung 4: Schleifscheibe und Andruckkräfte

## Problemstellungen aus der

- Elasto-/Plastizität
- Strömungsmechanik

## Mathematische Modelle

*Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen*

$$L(u) = f$$

## Formulierung in

- *nichtlineare Variationsgleichungen*
- *nichtlineare Variationsungleichungen*

**Diskretisierung:** *Finite-Elemente-Methode*

# Fehlerkontrolle, ein allgemeines Konzept

**Klassisch:** *a-priori* Fehlerkontrolle

**Modern** (seit '75 bzw. '90): *a-posteriori* Fehlerkontrolle

**Ziele:**

- a-posteriori Fehlerkontrolle
- als Summe von lokal definierten Fehleranteilen
- für ein beliebiges Fehlermaß

$u$ : Lösung des mathematischen Modells

$u_h$ : diskrete Finite-Elemente-Lösung

$J$ : Fehlermaß

$$|J(u - u_h)| \leq \sum_{T \in \mathbb{T}_h} \eta_T$$

## Fehlermaße

- Normen ( $L_2$ -Norm, Energie-Norm)
- Normalspannungen am Rand
- ...

## Strategie der gewichteten Fehlerschätzer

$\rho_T$ : lokale Residuen:  $(L(u_h) - f)_T$ ,

Spannungssprünge:  $(\sigma_n^+ - \sigma_n^-)_{\partial T}$

$\omega_T$ : Gewichtungsfaktoren bzgl. Fehlermaß

$$\eta_T = \omega_T \rho_T$$

**Berechnung** von  $\omega_T$ :

num. Lösen eines dualen, linearen Hilfsproblems

$$\boxed{(L')^T(u_h)z = J} \Rightarrow \text{Einflußfunktion } z \text{ bzgl. } J \Rightarrow \boxed{\omega_T}$$

$$|J(u - u_h)| \leq \sum_{T \in \mathbb{T}_h} \omega_T \rho_T$$



# Adaptive Gittergenerierung

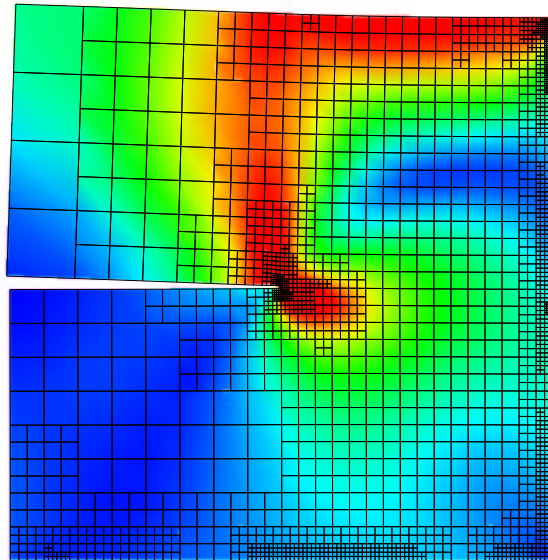


Abbildung 5: Rißöffnung eines belasteten Werkstücks (Suttmeier '96)

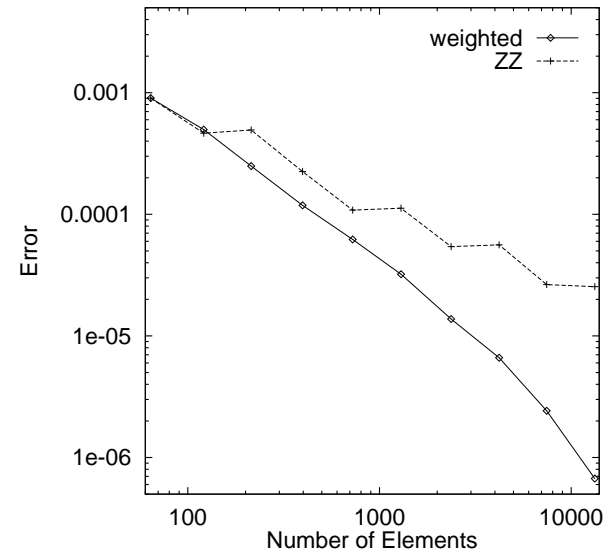


Abbildung 6: Aufwandsvergleich: ZZ- u. gewichteter Fehlerschätzer

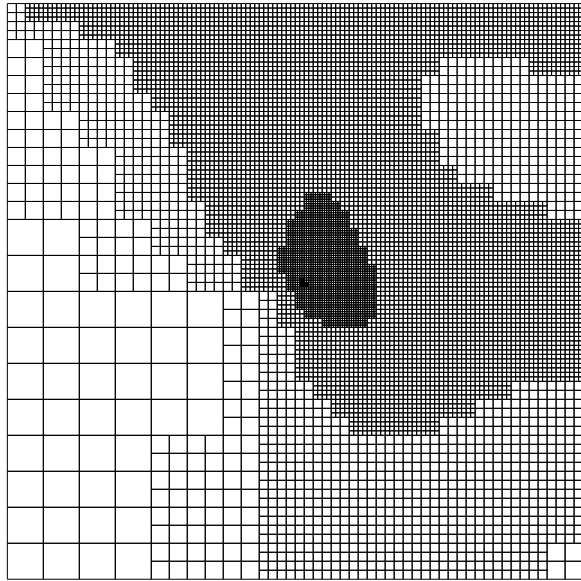


Abbildung 7: Gitter mit ZZ-Fehlerschätzer

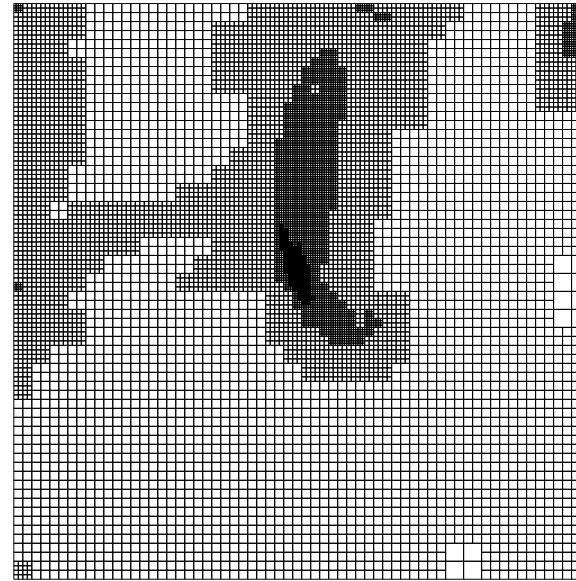


Abbildung 8: Gitter mit gewichtetem Fehlerschätzer

# Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen

## Nebenbedingungen:

- Kontakt- und Hindernisnebenbedingungen
- Fließbedingungen
- Reibung
- ...

## Mathematische Sicht:

### Variationsungleichungen

Schwierigkeiten bei der Anwendung **gewichteter Fehlerschätzer**:

- Formulierung des dualen Hilfsproblems:
  - Hilfsproblem ist auch eine Variationsungleichung
  - Aktive Nebenbedingungen?
- Hilfsproblem ist nicht linear  $\Rightarrow$  höherer numerischer Aufwand

# Fehlerkontrolle bei Problemen aus der Fertigungstechnik

## Fräsprozesse

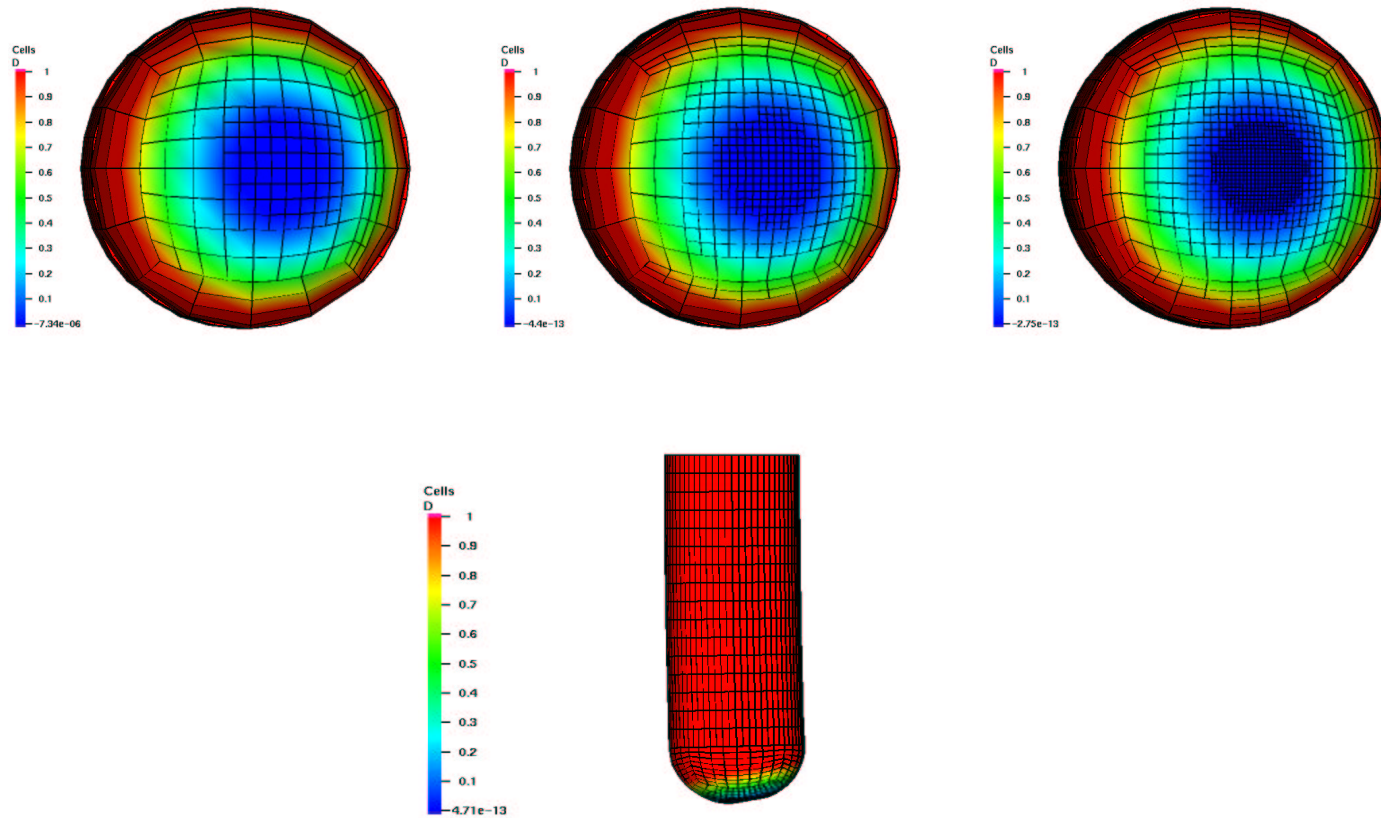


Abbildung 9: Fräserkopf und Andruckkräfte

# Schleifprozesse

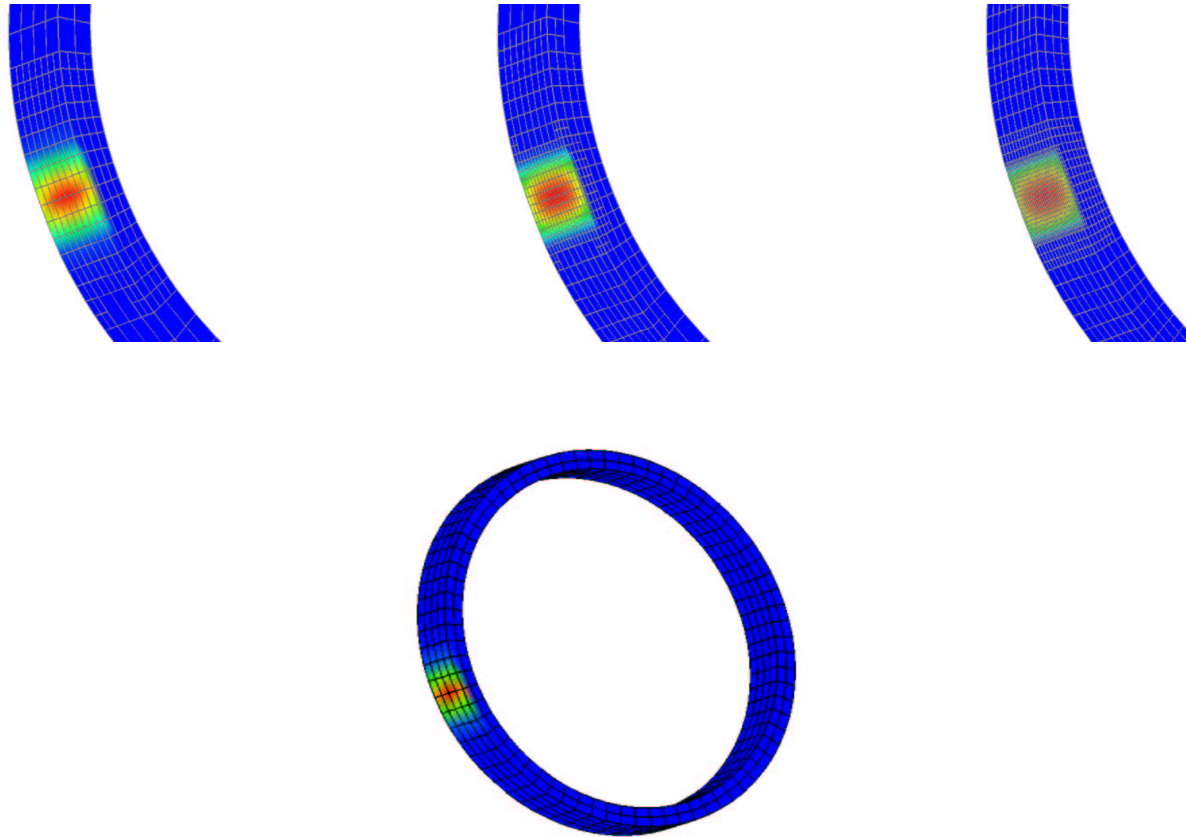


Abbildung 10: Kontaktrolle und Andruckkräfte

## Ausblick

1. Einbringung dynamischer (d.h. zeitabhängiger) Effekte
2. Einsatz von *hp*-Methoden ( $\Rightarrow$  exponentielle Konvergenz)  
d.h. Ordnungs- und Netzsteuerung